4-VARIETÀ 2018/19 - ESERCIZI

1. Esercizi del 27 ottobre

Esercizio 1.1. Sia A un gruppo abeliano finitamente generato senza torsione e Q una forma bilineare simmetrica su A. Mostra che Q è unimodulare (cioè ha $\det Q = \pm 1$) se e solo se per ogni base $a_1, \ldots, a_n$ di A esiste un'unica base $b_1, \ldots, b_n$ tale che $Q(a_i, b_j) = \delta_{ij}$ per ogni i, j.

Esercizio 1.2. Dimostra che le forme unimodulari $H \oplus \langle 1 \rangle$ e $2\langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle$ sono isomorfe.

Esercizio 1.3. Considera la forma $Q = \langle -1 \rangle \oplus 8\langle 1 \rangle$ su $\mathbb{Z}^9$. Sia $v = (3, 1, \ldots, 1)$. Sia $W = v^\perp$. Mostra che $Q|_W$ è isomorfa ad E_8.

Esercizio 1.4. Mostra che $E_8 \oplus \langle -1 \rangle \cong 8\langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle$ ma $E_8 \oplus \langle 1 \rangle \ncong 9\langle 1 \rangle$. (Suggerimento: conta il numero di elementi di norma 1)

Esercizio 1.5. Calcola la classe di Eulero della fibrazione di Hopf $S^3 \to \mathbb{CP}^1$, $(z, w) \mapsto [z, w]$, avente fibra S^1.

Esercizio 1.6. Siano M e N due n-varietà connesse orientate. Mostra che esiste sempre un cobordismo W^{n+1} connesso con $\partial_- W = M \sqcup N$ e $\partial_+ W = M \# N$.

2. Esercizi del 10 novembre

Esercizio 2.1. Sia X uno spazio topologico. Costruisci una naturale bigezione fra i rivestimenti doppi di X (visti a meno di isomorfismo) e $H^1(X, \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})$.

Esercizio 2.2. Sia M una n-varietà con bordo. Sia $M' = M \cup H^k$ una nuova varietà ottenuta attaccando un k-manico ad M e $M'' = M' \cup H^h$ ottenuta attaccando un h-manico ad M'. Scriviamo semplicemente:

$$M'' = M \cup H^k \cup H^h$$

dove si intende che i manici si attaccano da sinistra a destra: prima si attacca H^k e poi H^h. Mostra che se $h < k$ allora è sempre possibile "scambiare i due manici", cioè ottenere M'' come

$$M'' = M \cup H^h_* \cup H^k_*$$

dove H^h_* e H^k_* sono rispettivamente un h-manico ed un k-manico. Per aiutarti puoi fare un disegno nel caso $n = 3$, $k = 2$, $h = 1$.

Esercizio 2.3. Determina una decomposizione di Heegaard (cioè in due corpi con manici) della varietà $S_g \times S^1$ per ogni g. Qui S_g è la superficie compatta orientabile senza bordo di genere g.

Esercizio 2.4. Sia $K \subset S^3$ un nodo. Una *chirurgia di Dehn* lungo K con coefficiente $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ è l'operazione che consiste in questi due passi:

(1) Si rimuove da S^3 un intorno tubolare aperto νK, creando quindi una varietà M' compatta con bordo torico $T = \partial M' = \partial \nu K$.
(2) Si effettua quindi un riempimento di Dehn su M' attaccando un toro solido a T in modo che il meridiano del toro solido vada nella curva $p\mu + q\lambda$. Qui μ e λ sono il meridiano e la longitudine canonici di $T = \partial \mu(K)$.

Il risultato di una chirurgia di Dehn lungo K è una nuova varietà N compatta senza bordo. Mostra che $H_1(N, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$.

Esercizio 2.5. Descrivi una decomposizione in manici per $S^2 \times S^2$.

Esercizio 2.6. Sia $D^3 \subset M$ un disco in una 3-varietà M e $\text{int}(D^3)$ la sua parte interna. Mostra che se la varietà con bordo $M' = M \setminus \text{int}(D^3)$ è parallelizzabile, allora M è parallelizzabile.

3. Esercizi del 24 novembre

Esercizio 3.1. Sia S una superficie compatta senza bordo non orientabile e $E = S \tilde{\times} \mathbb{R}$ l'unico fibrato su S di rango 1 per cui E è una 3-varietà orientabile (puoi assumere che questo esiste ed è unico). Mostra che E è parallelizzabile.

Esercizio 3.2. Sia W una n-varietà compatta orientabile. Mostra che se W è spin allora anche ∂W è spin.

Esercizio 3.3. Mostra che se M e N sono due varietà spin di dimensione qualsiasi allora anche $M \times N$ è spin.

Esercizio 3.4. Mostra che qualsiasi matrice $n \times n$ simmetrica a coefficienti interi è forma di intersezione di una 4-varietà compatta semplicemente connessa con bordo.

Esercizio 3.5. Sia $M = (S_g, e)$ la 4-varietà che è il fibrato su S_g con numero di Eulero e. Mostra che M è spin se e solo se e è pari.

Esercizio 3.6. Mostra che $\mathbb{CP}^2 \# (-\mathbb{CP}^2)$ è diffeomorfa al fibrato $S^2 \tilde{\times} S^2$, l'unico fibrato non banale di S^2 su S^2.

4. Esercizi del 15 dicembre

Esercizio 4.1. Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale complesso. Mostra che $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è isomorfo a $E \oplus \bar{E}$.

Esercizio 4.2. Sia X una 4-varietà compatta semplicemente connessa. Mostra che esiste un $h > 0$ tale che $H_2(X\#_h\overline{\mathbb{CP}^2})$ abbia una base formata da sfere embedded.

Esercizio 4.3. Sia M una 4-varietà compatta con bordo. Supponiamo che M sia contrattile, cioè omotopicamente equivalente ad un punto. Mostra che ∂M è una sfera di omologia, cioè ha la stessa omologia di S^3.

Esercizio 4.4. Sia $V_d \subset \mathbb{CP}^3$ la superficie complessa (liscia) ottenuta come luogo di zeri di un polinomio omogeneo generico di grado d. Sia νV_d il suo fibrato normale. Mostra che $c_1(\nu V_d) = di^*(\alpha)$ dove α è il generatore di $H^2(\mathbb{CP}^3)$ tale che $\alpha([\mathbb{CP}^1]) = 1$ e $i\colon V_d \hookrightarrow \mathbb{CP}^3$ è l'inclusione.

Esercizio 4.5. Dimostra che $c(\mathbb{CP}^n) = (1+\alpha)^{n+1}$, dove α è un generatore di $H_2(\mathbb{CP}^n)$.

Esercizio 4.6. Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale complesso. Mostra che $p_1(E) = c_1^2(E) - 2c_2(E)$. Deduci (usando la formula di Hirzebruch) una formula per la segnatura di qualsiasi superficie complessa in funzione delle sue classi di Chern.

5. Esercizi del 22 dicembre

Esercizio 5.1. Sia M una 4-varietà (compatta, connessa, senza bordo, orientata) e $S \subset M$ una sfera con $S \cdot S = \pm 1$. Mostra che esiste una 4-varietà N per cui $M = N\#\mathbb{CP}^2$ oppure $M = N\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ a seconda del segno di $S \cdot S$.

Esercizio 5.2 (Formula di aggiunzione)**.** Sia $C \subset S$ una curva in una superficie complessa S. Mostra che

$$\chi(C) + C \cdot C = c_1(S)[C].$$

Nel membro a destra il numero intero $c_1(S)[C]$ è ottenuto applicando $c_1(S) \in H^2(S)$ su $[C] \in H_2(S)$.

Esercizio 5.3. Sia S una superficie complessa compatta e $S' \cong S\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ la superficie complessa ottenuta da S scoppiando un punto. Mostra che

$$c_1(S') = c_1(S) - PD([E]).$$

Qui stiamo identificando $H^2(S') = H^2(S) \oplus H^2(\overline{\mathbb{CP}}^2)$, quindi $c_1(S) \in H^2(S)$ e $PD([E]) \in H^2(\overline{\mathbb{CP}}^2)$ è un generatore, duale di Poincaré del divisore eccezionale $[E] \in H_2(\overline{\mathbb{CP}}^2)$. Omologia e coomologia sono sempre in $\mathbb{Z}$.

Esercizio 5.4. Dimostra rigorosamente che V_3 è diffeomorfo a $\mathbb{CP}^2\#_6\overline{\mathbb{CP}^2}$ nel modo seguente: fissa 6 punti espliciti $P_1, \ldots, P_6 \in \mathbb{CP}^2$, scrivi la mappa $f\colon \mathbb{CP}^2\#_6\overline{\mathbb{CP}^2} \to (\mathbb{CP}^3)^*$ che associa ad ogni punto Q l'iperpiano (nello spazio $\mathbb{CP}^3$ formato da tutte le cubiche passanti per i 6 punti) formato dalle cubiche passanti per Q e nota che l'immagine di f è effettivamente il luogo di zeri di un polinomio di terzo grado.

Esercizio 5.5. Sia M una 4-varietà che si decompone solo in 0-, 1- e 2-manici (niente 3- e 4-manici). Sia DM il doppio di M, cioè la varietà ottenuta prendendo due copie M_1 e M_2 di M e incollandole lungo il bordo con la mappa "identità". Ad esempio, $S^2 \times S^2$ è il doppio di $S^2 \times D^2$.

Mostra che $\pi_1(M)$ e $\pi_1(DM)$ sono isomorfi. Deduci che qualsiasi gruppo finitamente presentato è il gruppo fondamentale di una 4-varietà compatta orientata senza bordo.

Esercizio 5.6. Sia M una 3-varietà orientata compatta connessa senza bordo. Sia S_g una superficie compatta connessa senza bordo di genere g. Per ciascuna delle 4-varietà seguenti N, determina $\chi(N), \sigma(N), w_2(N)$ e la forma di intersezione di N (che può dipendere da M e g).

$$N = S_g \times S_g, \quad N = M \times S^1.$$